

文章编号:1000-8055(2011)09-2154-07

考虑轴承游隙的非线性动力学 轴承-转子系统优化

胡清华¹, 邓四二², 滕弘飞¹

(1. 大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024;
2. 河南科技大学 机电工程学院, 河南 洛阳 471003)

摘 要: 针对一类带动态性能约束的轴承-转子系统优化设计存在的问题, 做如下改进工作: 一是在目前一类轴承-转子系统优化模型基础上, 将轴承游隙作为设计变量, 考虑轴承游隙的影响; 二是提出了一种演化算法/线性搜索的混合算法, 将优化过程分为两个阶段, 首先采用演化算法对问题全局寻优, 求得给定代数时的优化解, 再以此解作为新的初始解, 采用线性搜索方法进行局部搜索。经数值仿真表明: 该优化模型中增加考虑轴承游隙后, 对优化结果有较大影响; 提出的混合算法克服了使用线性搜索方法难以确定初始解的问题, 在同等计算精度和耗时情况下, 该方法求解成功率较高。

关 键 词: 非线性动力学; 轴承游隙; 转子优化; 演化算法; 线性搜索

中图分类号: TB122; TH133.3

文献标志码: A

Optimization of rotor-bearing system with nonlinear dynamics considering internal clearance

HU Qing-hua¹, DENG Si-er², TENG Hong-fei¹

(1. School of Mechanical Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;

2. School of Mechatronics Engineering,
Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan 471003, China)

Abstract: In view of existing problems in optimization of a rotor-bearing system with dynamic performance constraints, the following improvements were made. Firstly, influence of clearance was considered in the optimization model. Secondly, a hybrid algorithm based on evolutionary algorithm/line search method was proposed. In the proposed algorithm, there were two optimization processes, global searching process using evolutionary algorithm to obtain an optimal solution and local searching starting with the optimal solution by line search method. Numerical results show that: the clearance has great influence on optimization results. The proposed algorithm overcomes the difficulty in choosing initial value for line search method, with higher success rate under the same calculation accuracy.

Key words: nonlinear dynamics; bearing clearance; rotor optimization;
evolutionary algorithm; line search

以涡轮机的轴承-转子系统为背景, 研究一类 考虑轴承游隙的非线性动力学轴承-转子系统的

收稿日期: 2010-09-04; 修订日期: 2010-12-05

基金项目: 国家“十一五”科技攻关项目(JPPT-115-189); 国家自然科学基金(50975033)

作者简介: 胡清华(1981-), 男, 河南沈丘人, 博士生, 主要从事轴承-转子动力学分析与优化、演化设计和布局优化设计研究。

优化问题,要求在满足动力学性能要求的情况下,使转子系统的质量尽可能小,这些动力学性能包括系统临界转速、轴承寿命等,设计变量为转子(轴)内径、轴承安装位置、轴承预紧力和轴承游隙。

有关轴承-转子系统动力优化的研究可追溯至上世纪80年代^[1],这类优化的前提需要建立轴承分析模型。目前轴承分析模型主要有拟动力学分析模型^[2]和动力学分析模型^[3];尽管在动力学模型中已经考虑了如轴承游隙^[4]以及轴承游隙和波纹度等因素^[5];但遗憾的是动力学模型还无法用于轴承-转子系统优化,原因是轴承分析是用来求解轴承的刚度和寿命的,轴承的刚度是求解系统临界转速的重要参数,要求输入的刚度值是一个确切的值,而动力学分析模型中刚度值是时间函数,是时刻变化的。因此,目前轴承-转子系统优化设计仍采用基于拟动力学分析模型^[6]。

轴承-转子系统优化的研究内容主要包括优化模型和优化方法两个方面。

优化模型方面,最早的研究以轴径为设计变量,以轴的质量为优化目标,约束条件是系统频率^[1];Shiau等^[7]以轴径为设计变量,以系统不平衡响应、临界转速为约束条件,以轴的质量最小为优化目标对转子系统优化。上述研究将轴承的刚度假定为不随转速和载荷变化的量,而事实上,轴承的刚度受转速和载荷的影响很大^[8]。2000年Lee和Choi^[6]以轴的质量为优化目标,设计变量除轴的内径外,增加考虑轴承的安装位置、轴承预紧力,并格外考虑了随转速和载荷变化的轴承刚度,以轴承寿命、系统临界转速为约束条件。采用增广拉格朗日乘子法(augmented Lagrangian method,简称ALM)进行求解,该研究至今被人们认为是具有代表性工作,但模型中没有涉及轴承游

隙的影响。

优化方法方面,主要包括线性搜索方法^[1,7,9]和演化算法^[10-12]。其中演化算法^[13]主要利用算法的种群搜索能力,具有很好的鲁棒性,但算法在后期易早熟。线性搜索方法通常需要敏度分析或差分求解梯度方向,属局部搜索方法,下降速度快,搜索效率高,但对于初值解要求高,求解时需要多次尝试不同的初始解,只有在初始解临近优化解情况下,才能保证算法收敛^[6],而目前还缺乏明确的确定初始值的方法。

本文在文献^[6]工作基础上,在优化模型和求解方法两方面做改进工作;在模型方面,将轴承游隙作为设计变量,考虑轴承游隙对临界转速等约束条件的影响;在求解方法方面,本文给出一种演化算法/线性搜索混合优化算法(简称GA/ALM算法)。将优化过程分为两个阶段:第一个阶段为演化优化阶段,采用演化算法(如遗传算法)对问题进行优化迭代到一定代数,利用演化算法的全局搜索能力获得一个好的优化解;第二个阶段为增广拉格朗日乘子优化阶段,将演化算法获得的优化解作为增广拉格朗日乘子搜索的初始解,再进行局部线性迭代搜索。这样克服了单纯使用增广拉格朗日乘子需要通过多次尝试求得合适的初始解,才能保证算法收敛的问题。

1 轴承-转子系统优化问题 数学模型

1.1 轴承-转子系统优化问题描述

该系统优化问题引自文献^[6]。系统的结构如图1所示,转子受两个滚动轴承的支承,在一定的转速范围内运转。将转子按阶梯轴截面的变化,以及左右轴承和圆盘的安装位置分为18个轴段。在

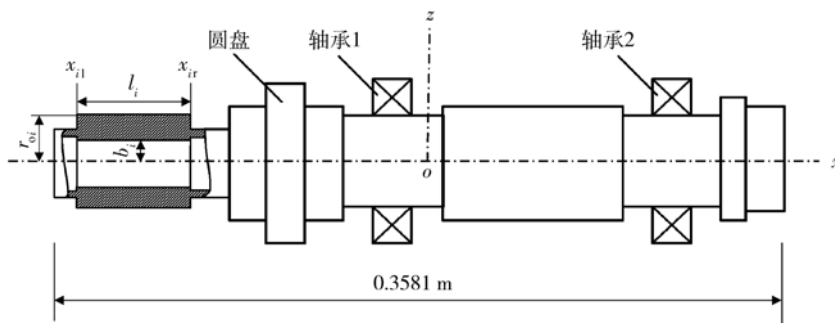


图1 轴承-转子系统结构简图

Fig. 1 Structure sketch of rotor-bearing system

转子中间点建立直角坐标系 xoz , 从左至右进行轴段编号, 两角接触球轴承分别安装在第 11 和第 15 段轴, 圆盘安装在第 5 段轴的右端. 轴承和转子的结构参数可参见文献[6]. 各段轴的外径不变, 内径可以在满足强度要求的范围内变化, 两轴承 1, 2 的位置可以分别在第 11 段轴和 15 段轴内左右移动, 设计变量是各轴段内径、轴承安装位置、轴承游隙和预紧力, 本文总计 24 个设计变量. 系统的优化目标是转子的质量最小, 约束为系统在低速运转时的一阶临界转速和在高速运转时的二阶临界转速, 以及两轴承的寿命.

1.2 系统的数学优化模型

本文在文献[6]的模型基础上, 增加考虑轴承轴向游隙影响. 先介绍文献[6]的数学模型(称之为模型 M1).

$$\min W(b) = \sum_{n=1}^{N_e} \rho_n A_n l_n \quad (1)$$

$$g_1(b) = \omega_1 - \Omega^l / c_1 \leq 0 \quad (2)$$

$$g_2(b) = c_2 \cdot \Omega^u - \omega_2 \leq 0 \quad (3)$$

$$g_{m+2}(b) = c_{m+2} \cdot L^* - L_m \leq 0, \quad m = 1, \dots, N_b \quad (4)$$

$$b_k^l \leq b_k \leq b_k^u, \quad k = 1, \dots, N_d \quad (5)$$

式(1)为优化目标, W 为转子质量, b 为设计变量, ρ_n, A_n, l_n 分别表示第 n 段轴的密度、横截面积和长度, N_e 表示轴段数量; 式(2)和式(3)是系统临界转速约束, 分别表示一阶临界转速 ω_1 低于系统最低运转速度 Ω^l , 二阶临界转速 ω_2 高于系统的最高运转速度 Ω^u , c_1, c_2 为调整系数; 式(4)表示寿命约束, 要求轴承的寿命 L_m 高于规定的最低寿命 L^* , $c_{m+2} (m=1, \dots, N_b)$ 为调整系数, N_b 为系统中轴承数量; 式(5)为所有设计变量的范围, b_k 表示第 k 个设计变量, b_k^l 和 b_k^u 是其变化最小值和最大值, N_d 表示所有设计变量的数目, 由于模型中除了考虑 N_e 个轴段内径外, 还有其他设计变量如轴承安装位置、预紧力和游隙, 因此 $N_d > N_e$. 考虑各轴段的横截面为圆环或者圆形, 优化目标转子的质量式(1)可改写为

$$W(b) = \sum_{i=1}^{N_e} \rho \pi (r_{oi}^2 - b_i^2) l_i \quad (6)$$

式中 r_{oi} 为第 i 段轴的外径.

模型 M2 与模型 M1 在形式上相同, 不同之处是增加了轴承游隙设计变量, 并且在约束条件式(5)中增加了其边界约束. 值得说明, 轴承游隙还影响式(2)和(3)的临界转速.

2 轴承分析及游隙影响

2.1 轴承分析

轴承分析是为了解轴承的寿命和刚度, 然后根据轴承的刚度和转子参数来求解系统的临界转速. 如前所述, 本文轴承分析在 Johns 的拟动力学分析模型[2]基础上增加考虑轴承游隙, 轴承游隙主要影响轴承的初始接触角 α^0 , 当给定的预紧力作用后, 轴承的接触角在上述初始接触角 α^0 的基础上产生变化. 该滚动轴承的分析流程如下: 根据轴承游隙和轴承参数, 按下式获得轴承的初始接触角 α^0

$$\sin \alpha^0 = \frac{\gamma}{2A} \quad (7)$$

式中 γ 为轴向游隙, A 是轴承内、外圈沟道曲率中心之间的距离. 考虑初始接触角 α^0 , 假设轴承的位移和转角, 计算了各个球的离心力和陀螺效应后, 采用 Newton-Raphson 迭代方法获得各个球的平衡位置以及接触形变, 再根据轴承的平衡方程, 采用 Newton-Raphson 迭代方法获得轴承的位移以及内外圈相对转角, 两者交替迭代. 最后根据轴承的平衡方程进行微分, 获得轴承在 x, z 轴以及扭转 3 个方向刚度.

轴承寿命的计算采用文献[14]的计算方法.

2.2 轴承游隙影响

本文增加轴承轴向游隙作为设计变量后, 直接影响着轴承的接触角(见式(7)), 对轴承的刚度[15]有较大的影响. 游隙越大, 轴承刚度越小. 反之亦然.

在用传递矩阵法求解系统临界转速时, 任何节点的刚度变化都影响着刚度矩阵的构成, 游隙影响着初始接触角 α^0 , 该初始接触角影响着内外圈接触角、离心力、陀螺效应, 以及球的位移和变形的计算, 进而影响轴承刚度值, 并最终影响着系统的临界转速[16]. 总之, 在增加考虑轴承游隙后, 通过影响着约束条件影响着优化方案.

3 优化模型求解算法

本文提出一种混合算法, 用于优化模型求解. 该算法流程简述如下: 首先采用遗传算法迭代一定代数 $G_{\max}$, 获得问题的一个优化解, 然后以此优化解作为新的初值, 再采用增广拉格朗日乘子法进行线性搜索. 其中 $G_{\max}$ 根据 $(f_{\max}^{G_{\max}+10} - f_{\max}^{G_{\max}}) / f_{\max}^{G_{\max}} \leq 0.01$ 求得, 图 2 是本文 GA/ALM

算法流程图。

在遗传算法优化阶段,系统的优化目标和约束条件采用罚函数法归一化处理,将问题转化为无约束的单目标优化问题

$$\min F(b) = W(b) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(b) \quad (8)$$

式中 λ_j 表示权重; m 约束的数量,本文 $m=4$ 。

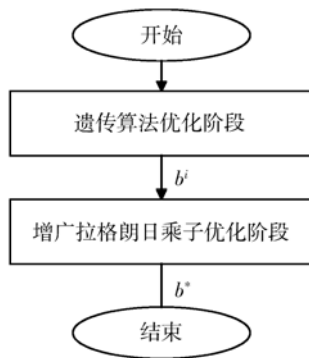


图2 本文 GA/ALM 算法流程

Fig. 2 Flow of proposed GA/ALM algorithm

4 数值仿真实验

4.1 算例

按文献[6],1.2节中模型具体参数如下。

设计变量数目 $N_d=24$ (文献[6]为22,增加考虑轴承游隙后 $N_d=24$), $N_e=18$, $N_b=2$, $\Omega=2400 \text{ rad/s}$, $\Omega^*=3500 \text{ rad/s}$, $c_1=c_2=1.2$, $c_3=c_4=1.25$ 。将上述参数代入式(2)~(4)计算得约束条件下式(9),设计变量的范围如表1所示。

$$\begin{aligned} g_1(b) &= \omega_1 - 2000 \leq 0 \\ g_2(b) &= 4200 - \omega_2 \leq 0 \\ g_3(b) &= 10950 - L_1 \leq 0 \\ g_4(b) &= 10950 - L_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

系统临界转速计算,采用传递矩阵法^[6]。只计算系统在低速运行($\Omega^*=2400 \text{ rad/s}$)时的一阶特

征值和高速运行($\Omega^*=3500 \text{ rad/s}$)时二阶特征值,分别作为低速时的一阶临界转速和高速时的二阶临界转速。

4.2 实验目的

本文的数值仿真实验共有三部分。一是验证本文提出的 GA/ALM 算法的有效性,对模型 M1 分别采用本文 GA/ALM 算法,ALM 方法^[6]和 GA^[10]求解,随机赋初值计算 50 次,比较三种算法求解结果。二是考察轴承游隙变化对优化方案的影响,即模型 M1 和模型 M2 的差异,采用 ALM 方法对模型 M1 和模型 M2 分别求解。这里采用文献[6]的 ALM 方法而没有采用本文提出的混合算法的原因是:为了验证模型中增加轴承游隙给优化方案带来的影响,而不是附加本文优化方法造成的最终设计方案不同,因此对两种模型都统一采用了 ALM 方法求解。三是基于模型 M2 采用本文 GA/ALM 算法求解的数值仿真实验。

4.3 算法设置和运行环境

根据数值实验设置本文第一阶段的基于遗传算法的优化迭代次数 $G_{\max}=20$ 。

遗传算法的设置:编码方式为实数编码,种群大小为 20,交叉概率为 1.0,变异概率为 0.05。所有算法终止条件设为:达到最大迭代次数 $K_{\max}=100$,或者求得文献[6]的最优值 1.339 0 时算法即终止。

运行环境:AMD CPU3600+,主频 2.0 G,内存 1 G,编程语言为 Matlab 和 C 语言。

4.4 本文求解算法有效性验证

采用本文方法、文献[6]的方法和遗传算法三种算法对模型 M1 各自随机赋初始值计算 50 次,统计计算成功率。其中成功率定义:在最大迭代次数 $K_{\max}=100$ 内,设算法在 50 次随机计算中获得最优值次数为 n ,则成功率 $= (n/50) \times 100\%$,计算结果如表 2 所示。

表1 设计变量及范围

Table 1 Design variables and ranges

设计变量 b_i (轴内径)	设计变量范围/mm	设计变量 b_i	设计变量范围/mm
1~4	[0, 3.1]	19(轴承 1 安装位置)/mm	[-40.0, 10.0]
5~6	[0, 18.3]	20(轴承 2 安装位置)/mm	[90.0, 120.0]
7~8	[0, 23.4]	21~22(两轴承预紧力)/N	[1000.0, 5000.0]
9~16	[0, 10.7]	23~24(两轴承游隙)/ 10^{-4} mm	[1.0, 5.0]
17~18	[0, 18.3]		

表2 三种算法求解模型 M1 的 50 次随机计算结果统计

Table 2 Statistical results of model M1 obtained by three algorithms for 50 times random computations

算法	目标最优值/kg	目标平均值/kg	达到最优值迭代次数/次	获得 1.3390 kg 数/次	成功率/%
GA/ALM	1.3390	1.3423	82	45	90
GA	1.5630	1.6446	$K_{\max}$ 内没有获得	0	0
ALM ^[6]	1.3390	1.5594	78(74)	3	6

从表2的结果可以看出,本文 GA/ALM 算法和 ALM 方法的最优值都为 1.3390 kg(如表1所示,所有轴段内径取最大值转子有最小质量 1.3390 kg). 本文混合算法和 ALM 法(初始解随机生成)获得最优值需要的平均迭代次数分别为 82 次、78 次,本文 GA/ALM 算法的平均计算效率为 ALM 法的 95.2%,但遗传算法在算法设置的最大迭代次数 $K_{\max}=100$ 次内还没有获得最优值,获得的最好解仅为 1.5630 kg. 从统计平均值而言,本文算法 50 次随机计算平均值达到 1.3423 kg,ALM 算法的设计目标平均值为 1.3594 kg;成功率本文方法为 90%,ALM 为 6%,本文方法计算成功率是 ALM 方法的约 16 倍.图3为本文GA/ALM算法和 ALM 算法成功计算的适应度曲线变化图.

按照文献[6]给定的尝试-修正获的初始解,用 ALM 法需要迭代 74 次获得最优解 1.3390 kg(如表2迭代次数统计列中括号内所示),由此可见本文算法与文献[6]ALM 算法计算效率相差不多.

如图3所示,本文方法通过 GA 优化阶段和 ALM 优化阶段,获得如文献[6]同样的最优解 1.3390 kg.

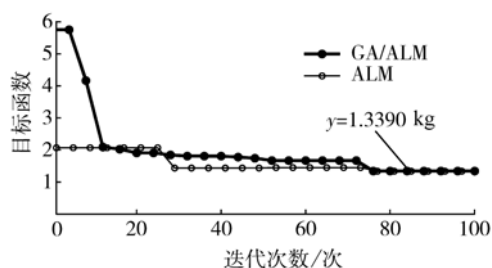


图3 本文 GA/ALM 算法和 ALM 算法求解模型 M1 适应度函数值变化

Fig. 3 Variations of fitness function values of GA/ALM and ALM algorithm

本文 GA/ALM 算法计算成功率高的原因

是:一方面由于第一阶段遗传算法是一种有效的全局优化算法,可为后续线性搜索提供了较好的初始解.尽管遗传算法比线性优化方法的计算效率要低,但它具有较好的鲁棒性,尤其是对于如本优化问题式(8)为一个非线性多峰函数又混合了多种不同类型的设计变量情况.但遗传算法在后期易出现早熟.为此,本文在第二阶段用线性搜索.既克服了文献[6]中单纯采用线性搜索需要试凑初始解才能使算法收敛的缺点,又避免了单纯采用演化算法导致算法在后期早熟的问题.

4.5 本文优化模型 M2 验证

为了说明优化模型中增加考虑轴承游隙给系统优化方案带来的影响,统一采用文献[6]的 ALM 算法求解模型 M1 和模型 M2,比较其优化结果.求解初始值选择文献[6]给出的初始值,该优化结果见表4,表5.模型 M2 与模型 M1 相比,增加考虑的两轴承游隙初始值分别取 4.2×10^{-4} , 4.0×10^{-4} m.

表3列出了模型 M2 和模型 M1 优化目标的结果比较.由表3可以看出,增加考虑了轴承的轴向游隙,得出的转子最小质量也为 1.3390 kg(这是由于文献[6]模型中给出各变量的变化范围确定,已达到其上限),如表1所示.当转子所有的内径都取最大值时,转子的质量最小为 1.3390 kg,所以这是理论最优解.虽然求解模型 M2 获得的最优值和 M1 一样,但是 M2 中考虑轴承的游隙后,在临界转速、轴承寿命和轴承安装位置方面两模型优化结果有较大不同,表4和表5分别列出两种模型优化方案的比较.

表3 M1 和 M2 两种模型的目标优化值

Table 3 Optimum cost values of model M1 and M2

模型	优化目标值/kg
模型 M1(文献[6]模型,不考虑游隙)	1.3390
模型 M2(本文模型,考虑游隙)	1.3390

由表 4、表 5 的优化方案比较可以看出,本文优化模型中增加考虑轴承游隙,对约束条件中的临界转速和轴承寿命以及设计变量有较大影响.具体表现在:①转子的一阶临界转速下降了 22.1%、二阶临界转速下降了 2.5%;②轴承 1,2 的位置比文献[6]向左偏移 9.209 8,17.8 mm(分别相当于整个轴长度的 2.6%和 5.0%);③轴承 1 的预紧力增加了 20.1%,轴承 2 的预紧力减少了 9.2%;④轴承的 1 的寿命减少了 3.3%,轴承 2 的寿命增加了 3.6%,虽然轴承 1 寿命略微减少,但轴承 2 的寿命也有略微增加,并且两轴承的寿命更加均衡(寿命差更小).

表 4 M1 和 M2 两种模型优化方案的临界转速和轴承寿命值
Table 4 Critical speeds and life of model M1 and M2

序号	约束条件	模型 M1 ^[6]	模型 M2	约束要求
1	低速时一阶临界转速/(rad/s)	1 460.00	1 138.60	≤2 000.0
2	高速时二阶临界转速/(rad/s)	4 648.29	4 563.87	≥4 200.0
3	轴承 1 高速时轴承寿命/h	13 417.85	12 973.42	≥10 950.0
4	轴承 2 高速时轴承寿命/h	11 279.17	11 687.26	≥10 950.0

表 5 模型 M1 和 M2 的优化设计方案
Table 5 Optimal schemes of model M1 and M2

设计变量	模型 M1			设计变量	模型 M2		
	ALM	ALM	GA/ALM		ALM	ALM	GA/ALM
b_1/mm	3.1	3.1	3.1	b_{13}/mm	10.7	10.7	10.7
b_2/mm	3.1	3.1	3.1	b_{14}/mm	10.7	10.7	10.7
b_3/mm	3.1	3.1	3.1	b_{15}/mm	10.7	10.7	10.7
b_4/mm	3.1	3.1	3.1	b_{16}/mm	10.7	10.7	10.7
b_5/mm	18.3	18.3	18.3	b_{17}/mm	18.3	18.3	18.3
b_6/mm	18.3	18.3	18.3	b_{18}/mm	18.3	18.3	18.3
b_7/mm	23.4	23.4	23.4	b_{19}/mm	5.63	-3.58	-3.58
b_8/mm	23.4	23.4	23.4	b_{20}/mm	120.0	102.2	102.7
b_9/mm	10.7	10.7	10.7	b_{21}/N	473.7	568.4	566.6
b_{10}/mm	10.7	10.7	10.7	b_{22}/N	1 667.0	1 514.7	1 515.4
b_{11}/mm	10.7	10.7	10.7	b_{23}/mm		0.383	0.383
b_{12}/mm	10.7	10.7	10.7	b_{24}/mm		0.326	0.326

4.6 本文优化方法 GA/ALM 数值仿真实验

本数值仿真实验包括本文模型 M2 和混合算法.优化模型如式(1)~(5)所示,求解用本文提出的 GA/ALM 混合算法.算法设置同上,求解结果表明,求得了最优目标值 1.339 0 kg,低速和高速的临界转速分别为 1 142.13,4 557.29 rad/s,轴承 1 和轴承 2 高速时的寿命分别为 13 017.22,11 648.71 h,迭代次数为 84 次,计算成功率为 90%,求得的优化方案见表 5.

5 结 论

本文以涡轮机的简化的轴承-转子系统优化设计为背景,研究一类带动力学性能约束轴承-转子系统优化问题.本文在优化模型和求解算法两个方面做了改进工作:一是在文献[6]优化模型中增加轴承游隙设计变量及其边界约束,并考虑了对约束条件影响;二是提出一种演化算法/线性搜索的混合算法,将优化分为两个阶段,首先用遗传算法获得问题的一个优化解,然后以此优化解为

初始解再用增广拉格朗日乘子线性搜索方法进行寻优,解决了文献[6]初始解难以确定的问题。

经数值实验表明:①轴承游隙对轴承刚度有较大影响,进而影响到系统优化的约束条件临界转速和轴承寿命,最终影响优化设计方案。与文献[6]相比,轴承安装位置、轴承预紧力和轴承寿命都有较大不同。②本文的混合求解算法,与增广拉格朗日乘子法相比,在相等计算精度下和计算效率相近情况下,求解成功率较高。

参考文献:

- [1] Shiau T N, Hwang J L. Minimum weight design of a rotor bearing system with multiple frequency constraints[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1988, 110(4):592-599.
- [2] Harris T A. *Rolling bearing analysis*[M]. 3rd ed. New York: John Wiley and Sons, 1990.
- [3] Gupta P K. Dynamics of rolling-element bearings Part III: ball bearing analysis[J]. *Journal of Lubrication Technology*, 1978, 101(3):312-318.
- [4] De Mul J M, Vree J M, Maas D A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction Part I: general theory and application to ball bearings[J]. *Journal of Tribology*, 1989, 111(1):142-148.
- [5] BAI Changqing, XU Qingyu. Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 294(1-2):23-48.
- [6] Lee D S, Choi D H. Reduced weight design of a flexible rotor with ball bearing stiffness characteristics varying with rotational speed and load[J]. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 2000, 122(3):203-208.
- [7] Shiau T N, Hwang J L. Optimum weight design of a rotor bearing system with dynamic behavior constraints[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1990, 112(4):454-462.
- [8] Lim T C, Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings Part I: bearing stiffness formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 139(2):179-199.
- [9] Shiau T N, Chang J R. Multi-objective optimization of rotor-bearing system with critical speed constraints[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1993, 115(2):246-255.
- [10] Choi B G, Yang B S. Optimum shape design of rotor shafts using genetic algorithm[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2000, 6(2):207-222.
- [11] Choi B K, Yang B S. Multiobjective optimum design of rotor-bearing systems with dynamic constraints using immune-genetic algorithm[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, 123(1):78-81.
- [12] Saruhan H. Optimum design of rotor-bearing system stability performance comparing an evolutionary algorithm versus a conventional method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(12):1341-1351.
- [13] Angantyr A, Aidanpaa J O. A pareto-based genetic algorithm search approach to handle damped natural frequency constraints in turbo generator rotor system design[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2004, 126(3):619-625.
- [14] Ioannides E, Harris T A, Ragen M. Endurance of aircraft gas turbine mainshaft ball bearings-analysis using improved fatigue life theory Part 1: application to a long-life bearing[J]. *Journal of Tribology*, 1990, 112(2):304-308.
- [15] Jang G H, Jeong S W. Stability analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness[J]. *Journal of Tribology*, 2003, 125(1):91-101.
- [16] 李育锡, 王三民. 改进整体传递矩阵法计算复杂转子系统临界转速[J]. *航空动力学报*, 2005, 20(3):413-417.
LI Yuxi, WANG Sanmin. Application of the improved whole transfer matrix method to the calculation of complex rotor critical speed[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2005, 20(3):413-417. (in Chinese)